Jérôme Bastong
Ecole Marcel Pagnol
1 avenue de la Commune de Paris
Les Clayes-sous-Bois
Année scolaire 2008-2009

Mémoire de CAFIPEMF

La division au cycle 3 :

Comment gérer les difficultés liées à l'articulation du sens et de la technique opératoire ?

Sommaire

1 Introduction

La division est une opération qui interpelle élèves, parents et professeurs. Ayant enseigné principalement au cycle 3 dans les trois classes qui le composent, j'ai pu recueillir les réponses des élèves à la question : « Qu'est-ce que vous pensez que vous allez apprendre cette année ? » et bien souvent la division était citée, notamment pour le CM1. Lors des réunions individuelles ou collectives avec les parents, souvent des questions ou des inquiétudes portent sur ce sujet. Il m'est arrivé de demander aux parents présents, lors des réunions de début d'année, combien d'entre eux savaient faire une division sans coup férir. En général, assez peu se signalaient. C'est tout à fait normal. Dans la vie courante, le recours à la calculatrice est quasiment automatique pour toute opération qui ne se fait pas mentalement. Leurs enfants, comme eux, recourront à la machine dès que la division ne sera plus un apprentissage mais deviendra une opération rencontrée au cours d'un raisonnement. J'ai pu à travers une courte expérience de l'enseignement en secondaire vérifier que les opérations étaient effectuées à la calculatrice dès qu'elle était autorisée, souvent même au détriment du calcul mental.

Cependant, les programmes de 2008 mettent l'accent sur la capacité des élèves à maîtriser la technique opératoire pour chacune des quatre opérations.

Le calcul :
- mental : tables d'addition et de multiplication. L'entraînement quotidien au calcul mental portant sur les quatre opérations favorise une appropriation des nombres et de leurs propriétés.
- posé : la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable.
- à la calculatrice : la calculatrice fait l'objet d'une utilisation raisonnée en fonction de la complexité des calculs auxquels sont confrontés les élèves.

Il est prévu d'aborder les problèmes de groupements et partages par 2 et 5 de nombres à deux chiffres dès le CE1. Il est important qu'au cycle 3 les élèves construisent une méthode solide pour effectuer une division. C'est une connaissance du socle commun.

Parmi les quatre opérations, c'est celle dont le sens est peut-être le plus difficile à saisir et dont la technique est la moins aisée. Cela m'a interpellé pour tenter de trouver une démarche pédagogique efficace à l'enseignement de la division, qui s'intéresse au sens et à la technique, sans dissocier ces deux aspects. Ce sont les relations entre sens et technique qui vont constituer l'objet du présent mémoire.

2 Exploration du sujet

2.1 Définitions mathématiques

Le terme de division peut représenter plusieurs choses. D'une part ce terme peut représenter la division euclidienne, celle enseignée à l'école élémentaire pour les situations de partage et groupement avec reste. D'autre part ce terme peut représenter la division, opération qui à deux nombres associe le quotient de l'un par l'autre. Bien entendu, nous nous intéresserons principalement à la division euclidienne, qui est étudiée au début de l'enseignement de la division, lors de la construction de celle-ci.

La définition de Wikipedia :

Division euclidienne dans les entiers positifs

$$\forall(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \exists!(q,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a = b.q + r \quad et \quad 0 \leqslant r < b$$

À deux entiers a et b, avec b non nul, la division euclidienne associe un unique quotient q et un unique reste r, tout deux entiers, vérifiant :

- $a = b.q + r$
- $0 \leqslant r < b$

En mathématiques, une opération est un processus visant à obtenir un nombre à partir d'un ou plusieurs objets mathématiques. Pour ce qui concerne les quatre opérations fondamentales, cela consiste à obtenir un résultat (somme, différence, produit ou quotient) à partir des deux nombres de départ. Dans ce cadre, la division euclidienne n'est pas à proprement parler une opération, dans le sens où elle produit un quotient et un reste. Le langage courant dit que la division euclidienne est une opération et il serait inutile de corriger cela auprès des élèves.

En revanche, il est intéressant d'explorer le terme division. D'après Stella Baruk, la division, qu'elle définit comme étant l'inverse de la multiplication, recouvre deux aspects :
- la décision, l'intention d'un calcul,
- l'action effectuée sur deux nombres afin d'en obtenir un troisième.

A l'école élémentaire, on retrouve cette dualité :
- le sens de l'opération : quelle situation demande une division pour trouver la réponse ?
- la technique opératoire : comment utiliser une technique experte pour résoudre la situation ?

Stella Baruk, dans son « Dictionnaire de Mathématiques élémentaires », met l'accent sur le sens, en montrant que l'opération tient dans la décision d'effectuer une division et que la technique, selon elle, n'est que secondaire.

On peut s'intéresser au concept de « nombre ». On peut émettre des critiques envers le modèle de Stella Baruk quand elle entend dissocier nombre et quantité à l'école élémentaire. A mon sens, il faut lier nombre et quantité. Pour Rémi Brissiaud, la quantité est la mesure de l'extension d'une collection. Le nombre est une représentation non analogique de la quantité grâce à un « mot nombre ». Une représentation analogique serait une collection témoin : cailloux, doigts ou constellations (« Comment les enfants apprennent à calculer » p 26, 27).

La définition de Newton va dans le même sens et souligne le rôle de l'unité et de l'équivalence, de la correspondance terme à terme entre deux collections de même quantité.

Par nombre, nous entendons non pas une multitude d'unités, mais plutôt le rapport d'une quantité quelconque à une autre quantité de même sorte, que nous prenons comme unité.

Newton – Universal Arithmetic - 1728

Dans le modèle piagétien, le nombre n'est pas une propriété des objets qu'on considère, « le nombre est construit par le sujet par l'abstraction de l'organisation que le sujet a introduite au sein des objets. » (Enseignement et apprentissages des mathématiques, Crahay, Verschaffel p 58, 59). En revanche, Jean Piaget insiste sur l'importance de la conservation du nombre, lorsqu'un enfant « conservant » déduit l'invariance du nombre d'objets d'une collection après changement de forme de la disposition des objets.

Enfin, on va s’intéresser à la technique opératoire de la division. Celle qui était préconisée dans les documents d’application de 2002, la division « française », garde les soustractions posées sans écrire tous les zéros des multiples successifs. On prendra celle-ci comme référence.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 7 & 8 & 0 & 5 & 2 & 7 & \\ \cline{6-8}
- & 5 & 4 & & & & & \\ \cline{2-3}
 & 2 & 4 & 0 & & 2 & 8 & 9 \\
- & 2 & 1 & 6 & & c & d & u \\ \cline{2-4}
 & & 2 & 4 & 5 & & & \\
 & - & 2 & 4 & 3 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 2 & & &
\end{array}
$$

Et le résultat sera exprimé par l’égalité :
7805 = (27 x 289) + 2

2.2 Les programmes, vision historique

Jusque dernièrement, l’enseignement des opérations dans la scolarité élémentaire était rythmé par niveau : l’addition au CP, la soustraction au CE1, la multiplication au CE2 et la division aux CM1 et CM2 (Gérard Morin, article de 2006 « la division » dans Les Cahiers Pédagogiques). Il n’en a pas toujours été le cas et les nouveaux programmes de 2008 viennent de modifier le niveau d’introduction des diverses opérations. Il conviendra d’ailleurs de distinguer, comme le souligne Roland Charnay dans un article du bulletin de l’APMEP (bull. 469, 2007), l’introduction de l’apprentissage de la technique opératoire, dont il déconseille l’introduction trop hâtive, et l’introduction de situations de partage et groupement, qui peuvent être résolues dès le CP avec les outils mathématiques disponibles pour des enfants de 6 à 7 ans, qui lui semble bénéfique. Regardons les programmes et les activités proposées pour aborder la division.

Dans les programmes de 1882, il est écrit :
Pour utiliser un langage actuel, il s’agit de rendre l’élève « acteur de ses apprentissages ». Entretenant avec les élèves « un continuel échange d’idées, le maître doit partir de ce que les enfants savent et les amener à découvrir de nouvelles notions en procédant « du connu à l’inconnu ». La démarche préconisée – observer, comparer, généraliser –, participe de la construction d’une véritable culture primaire où la pratique fait partie intégrante de la formation générale. Dans les premières leçons de calcul, le maniement et l’observation d’objets matériels tels que bûchettes, boulier, etc., visent à réduire l’usage souvent trop exclusif de la mémoire au profit des capacités d’intuition des élèves.

Observer, comparer, généraliser sont les fondements de la démarche utilisée. On part de la réalité avec des exemples issus de la vie de tous les jours ou on utilise des médiateurs comme point de départ de la réflexion.

L’enseignement des années 1920 est dit « concentrique ». On revient chaque année sur les acquisitions des années antérieures. Le retour annuel sur les notions enseignées a pu vouloir garantir ces acquisitions. Cela fait place à un enseignement plus progressif avec les programmes de 1923. La manipulation en mathématiques (découpage, pliage, utilisation de bûchettes) est le point de départ des apprentissages (article de Renaud d’Enfert). L’expérience des élèves est mise en avant.

Dans les manuels d'après-guerre, on trouvait l'introduction de la division au cycle moyen par des exercices de réflexion dont le moteur principal était la multiplication. Les programmes de l'époque asseyaient la partie « calcul » de l'arithmétique sur la maîtrise des techniques opératoires des 4 opérations. Les problèmes de réinvestissement allaient croissant en difficulté mais n'étaient souvent que des exercices d'application dont les énoncés, centrés sur la vie quotidienne et notamment campagnarde, se répétaient. Les mathématiques étaient utilitaires et les problèmes portaient sur des sujets de la vie courante (revue de l'Inspection Générale 2003). J'ai trouvé cet exercice, introduisant l'étude de la division, présenté dans un manuel de 1956 (Cours d'Arithmétique Ch. Pugibet, Annexe I) :

Une maîtresse donne 8 cahiers à chacune de ses 6 élèves du Cours Supérieur. Combien a-t-elle distribué de cahiers ?
Une maîtresse distribue 48 cahiers à 6 élèves. Quelle est la part de chacune ?
Une maîtresse qui a 48 cahiers doit en donner 8 à chacune de ses élèves. Combien a-t-elle d'élèves ?

Il est expliqué ensuite qu'on calcule la valeur d'une part ou le nombre de parts, et il est introduit les termes dividende, diviseur et quotient sans autre forme de procès. On peut imaginer qu'avec un peu de bonne volonté, on pouvait obtenir les réponses attendues aux questions posées, tant la réflexion paraît limitée. Le risque est grand que des élèves ne créent que peu de sens aux mots introduits et ne conçoivent comme notion de ce qu'est une division qu'un vague inverse de la multiplication, de manière opératoire, sans bien faire le lien avec la situation de partage ou de groupement sous-jacente. La technique opératoire est ensuite introduite de manière abrupte, au travers d'un exemple de soustraction de multiples qui laisse place immédiatement à la potence dont les soustractions auront été gommées. On peut parier que, si les élèves arrivent à construire le sens du partage, ils ne verront la technique opératoire que comme une recette pour venir à bout de l'opération, sans lien aucun avec le sens de l'opération.

Les programmes des années 1970 avec les « mathématiques modernes » vont balayer les pratiques précédentes. La pertinence de l'introduction de la théorie ensembliste dès les petites classes n'est pas le propos du présent mémoire, mais nous retiendrons que cette réforme a eu le mérite de poser la question de la didactique des mathématiques. (R. Charnay, Pourquoi des mathématiques à l'école ?). La manière de considérer les mathématiques à l'école va changer radicalement :

La massification de l'enseignement amène à repenser la manière d'enseigner les mathématiques, on ne veut pas seulement former des citoyens aptes à faire face aux problèmes de la vie courante mais l'ambition est bien que l'enseignement contribue à un meilleur développement des élèves par une compréhension réelle des notions abordées. (L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième République aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse » Renaud d'Enfert)

Il s'ensuit un allègement des programmes, au CP on n'apprend plus que l'addition de deux nombres entiers. Les pourcentages et intérêts, au CM, n'apparaissent plus explicitement. La division prend place au CM. L'apport de la psychologie de l'enfant va s'exprimer pleinement et la construction des savoirs va devenir un enjeu important de l'enseignement.

Les programmes de 1985 positionnent la division au Cours Moyen, attribuent la maîtrise de la multiplication au Cours Elémentaire et soulignent la volonté d'appliquer des théories didactiques de construction active des savoirs.

Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes.
On peut répartir ces problèmes en trois groupes :
- ceux qui permettent la construction de nouveaux outils mathématiques (par exemple l'introduction de la soustraction, de la multiplication, des nombres décimaux);
- ceux qui invitent à utiliser des acquis, à en percevoir éventuellement les limites d'utilisation ;
- problèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ; élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites, et des procédés de calcul approché(ordre de grandeur et encadrements).

Les programmes de 1995 continuent en droite ligne de ceux de 1985 en mentionnant les techniques opératoires des 4 opérations, tout en laissant les élèves découvrir au collège la division de deux nombres à virgule.

Les programmes de 2002 soulignent le fait que les élèves doivent comprendre les techniques opératoires : « le sens des opérations doit être au centre des préoccupations », « les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur des nombres d'usage courant, en s'attachant à assurer une bonne compréhension des étapes ».

Les nouveaux programmes de 2008 mettent l'accent sur la maîtrise des opérations, et notamment des techniques opératoires : « [calcul] posé : la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable. »

La division apparaît maintenant au CE1 par 2 et par 5 pour les nombres inférieurs à 100, il faut « approcher de la division de deux nombres entiers à partir de partage ou de groupement ».

Une maîtrise de la technique opératoire est exigée en CE2 pour la division à un chiffre. Le changement est conséquent et a suscité de vives réactions de la part de pédagogues. Il faut modifier en profondeur nos approches pour suivre les orientations préconisées. Il est répété en préliminaire aux progressions des cycles 2 et 3 : « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente pas tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. »

2.3 Champ d'expérimentation, options d'enseignement

Les nouveaux programmes entrant en vigueur à cette rentrée 2008, les élèves de CM1 que j'ai cette année ont suivi les programmes de 2002 jusqu'à présent et entrent dans ce niveau en n'ayant eu ni en CE1 ni en CE2 d'initiation à la technique de la division et qu'une brève introduction aux situations de partage. L'introduction de la notion est donc à faire complètement.

Dès cette année, dans les classes de CE1, les situations de groupements et partages seront introduites et dans deux ans seulement les CM1 auront suivi le cursus prévu dans les nouveaux programmes pour ce qui est de l'opération qui nous occupe.

Il est donc délicat de parler de niveau actuellement et je situerai l'expérimentation que je propose par la suite à l'introduction de la division posée au cycle 3, que ce soit au CE2 ou au CM1, selon l'année à laquelle les élèves y sont confrontés, ainsi que dans son prolongement et son renforcement dans le reste du cycle.

Jusqu'à présent, j'ai eu beaucoup de classes de CM1, souvent associées à un autre niveau, et j'ai eu à de nombreuses reprises à aborder la division avec les élèves et à continuer son enseignement. Un certain nombre d'interrogations me sont apparues quant à la manière d'aborder cette opération. La manière de passer du sens à la technique m'a paru être un point important.

L'école où j'exerce est une école de centre ville regroupant des élèves de quartiers essentiellement pavillonnaires ou de petits immeubles. Ma classe est assez hétérogène, elle compte plusieurs élèves en grande difficulté voire en difficulté lourde. Il m'est apparu rapidement que, dans un souci d'efficacité et d'adaptation à l'hétérogénéité, il fallait différencier mon enseignement le plus possible.

Différencier, c'est refuser l'indifférence. (Daniel Perrenoud)

Les difficultés de certains élèves sont telles qu'on ne peut leur apporter un enseignement frontal sous peine de les mettre en échec systématiquement. Au delà d'une différenciation « naturelle » de la manière d'apporter de l'aide à ses élèves, il faut se pencher sur des différenciations successives ou simultanées afin que chacun trouve matière à apprentissage. Il m'arrive quotidiennement de constater la diversité chez les élèves : dans leur manière d'apprendre, que ce soit au niveau de leur mémoire, de l'image mentale qu'ils font d'une situation ou de la formulation de cette image mentale. Dans ma démarche, j'aurai le souci de cette hétérogénéité, qu'elle concerne le rythme d'avancement des élèves ou de la manière par laquelle ils vont construire l'opération.

Dans les différentes démarches possibles, il m'est apparu que, pour souhaiter la réussite de tous les élèves, il fallait ménager à chacun la possibilité d'avancer à son rythme pour construire cette notion et explorer la technique.

2.4 Questionnement

J'aborderai par la suite l'étude du sens des situations de partages et de groupements, point de départ de mon travail avec les élèves. Mais posons nous dès maintenant les questions qui vont guider notre étude. La question initiale de l'articulation du sens et de la technique opératoire va se décliner au travers de la démarche pédagogique employée. Au chapitre 3, on explicitera les options pédagogiques retenues et les théories sous-jacentes.

Les situations de partages et groupements ne sont pas une chose nouvelle lorsqu'on doit aborder la technique opératoire. Après avoir vérifié que les élèves maîtrisent ces notions, il faut s'atteler à « faire une division », c'est-à-dire aborder la technique opératoire. En général, c'est là que les difficultés apparaissent. Il est intéressant d'analyser ce qui va poser problème aux élèves et à l'enseignant.

- Des élèves qui ne construisent pas la notion risquent de tenter de « faire comme les grands », quitte à aborder la technique opératoire sans la comprendre. On risque de voir les élèves adopter une technique mécaniste dénuée de toute compréhension de cette même technique, voire même sans aucun lien avec le sens de l'opération, y compris si celui-ci est acquis. Cet écueil pourrait arriver après un exposé magistral de la technique sans lien avec les représentations des élèves. Comment ne pas perdre le sens en construisant la technique ?
- Des élèves peuvent avoir des techniques « naïves » différentes. Mis face à une situation-problème relevant de la division, des élèves vont utiliser leurs représentations, parfois différentes pour tenter de résoudre cette situation avec des techniques non expertes qui vont

aboutir. Il faut, pour l'enseignant, prendre en compte ces techniques naïves différentes pour les faire évoluer vers la technique de référence.
- Une autre difficulté, pour l'enseignant, va être de déterminer la situation de départ pour introduire la technique opératoire. A quel moment est-ce pertinent ? Dès l'abord du sens ? Une fois que le sens est acquis ? A partir de quelle situation, simple ou complexe, de partage ou de groupement, commence le travail sur la technique opératoire ?
- Certains élèves vont entrer tout de suite dans la technique opératoire de référence et en comprendre le fonctionnement, et d'autres pas tout de suite, et enfin d'autres encore pas du tout. L'enseignant devra gérer cette hétérogénéité, sans attentisme mais en étant attentif à chacun.

Une situation d'apprentissage peut s'analyser selon trois axes : élève, enseignant, savoir. On va s'intéresser aux théories pédagogiques qui pourraient répondre à ces difficultés en empruntant ces axes.

3 Cadre théorique

D'une manière générale, je vais développer ici les grandes lignes qui cadrent mon travail, au niveau de la démarche générale d'une part, et de sa déclinaison pratique d'autre part.

3.1 Construction des savoirs

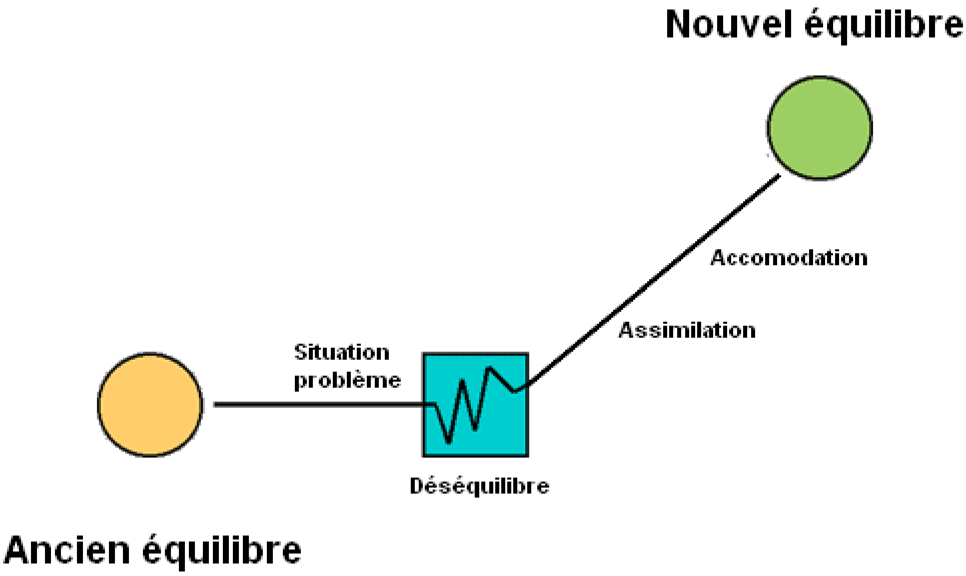
Gérard Morin, dans un article de 2006 consacré à la division, écrit ceci :

Si enseigner la division se résume à l'enseignement de la technique, dans un cadre transmissif, les élèves vont être rapidement dans la recherche de virtuosité pour la technique et risquent de ne pas s'approprier le sens.

L'enseignant peut travailler des situations de partages et groupements, vérifier que les élèves ont acquis le sens, puis montrer la technique au tableau et exhorter les élèves à reproduire le modèle. Il y a fort à parier que certains réussissent, voire même une majorité si on fait répéter le processus suffisamment. En revanche, qu'en restera-t-il après quelques années ? Que comprennent les élèves lorsqu'ils multiplient les chiffres successifs du quotient par le diviseur ? Quel lien font-ils entre la technique et le sens ? Pas grand choses pour la plupart, c'est à craindre.

Pour ne pas être dans un cadre transmissif, il faut que les élèves soient les acteurs de leurs apprentissages, qu'ils construisent les notions qu'ils apprennent. Le modèle piagétien insiste sur le déséquilibre initial qui va provoquer une déstabilisation de l'élève et l'engager dans un nouvel apprentissage. Ici, cette déstabilisation va prendre la forme d'une situation problème, une situation de partage ou de groupement pour laquelle l'élève n'aura pas à disposition la technique experte mais pourra essayer de la traiter avec les outils qu'il a à sa disposition (addition, soustraction, multiplication, utilisation de schémas, de dessins).

Pour Jean Piaget, toute connaissance est le résultat d'une expérience individuelle d'apprentissage. Les nouvelles connaissances vont se construire par assimilation de la nouveauté et accommodation avec les connaissances déjà présentes. La phase d'apprentissage se termine avec un nouvel état d'équilibre.



3.2 Situation-problème

Roland Charnay, dans « Pourquoi des maths à l'école élémentaire ? », définit la situation-problème comme étant un problème qui permet à l'élève de comprendre que ses solutions spontanées ne conviennent pas, qu'il faut qu'il change son système de représentation.

Il explique que les situations proposées aux élèves en vue d'un nouvel apprentissage doivent être assez riches et complexes pour que les élèves doivent chercher une nouvelle manière de résoudre. Si une situation de dénombrement des places dans 6 rangées de tables à 4 places est proposée, la solution additive est efficace et assez rapide. Il n'y a aucune raison pour que l'élève ressente le besoin d'un nouvel outil. (p78)

La situation problème, pour être efficace, doit être suffisamment complexe pour d'abord mettre en échec les conceptions initiales erronées de l'élève, mais ne doit pas l'être trop pour permettre aux élèves ensuite d'élaborer une solution au problème posé.

La situation problème, ici, se présentera sous forme d'une situation de partage ou groupement. Cette situation doit être suffisamment complexe par la taille du dividende et du diviseur afin qu'une solution naïve soit découragée par la lenteur de traitement ou la complexité des calculs et donc que l'élève ait besoin d'un nouvel outil pour résoudre le problème.

Dans un article de la revue « L'Ecole Valdotaine » n° 48 de septembre 2000, M. Assuied et Mme Ragot expliquent que ce n'est pas la résolution d'un problème unique qui est visée ici.

En situation - problème, ce n'est donc pas seulement la résolution d'un problème singulier qui est recherchée, mais, à travers elle, la capacité à analyser une situation du point de vue de son contenu et de sa structure, la capacité à reconnaître une situation ou un objet comme constitués d'un ensemble de relations, donc d'une certaine façon la capacité à reconstruire l'objet étudié pour en examiner les principes structuraux, formels.

3.3 Théorie des champs conceptuels.

Gérard Vergnaud (dans Didactique des Mathématiques, Jean Brun) s'intéresse aux situations proposées aux élèves et à ce qui permet l'élève de traiter ces situations. Devant une situation reconnue comme faisant partie d'une classe de situations connue, l'élève va faire fonctionner un schème, une manière de traiter le problème, c'est un outil fonctionnel et identifié comme tel qui permet de traiter la tâche. Ce schème doit avant tout être efficace, doit être juste et doit agir dans son champ de validité. On assiste à la création de « théorème de l'élève » dont l'efficacité est limitée par une classe de situations et que les élèves ont tendance parfois à appliquer hors de ce champ. Par exemple, les élèves érigent au rang de théorème le fait que « quand je multiplie un nombre par 10, je mets un zéro à droite du nombre que je multiplie » et malheureusement l'application de ceci aux nombres à virgule produit des résultats faux. Mais dans son champ de validité, la procédure est efficace.

Il produit la définition du concept :

Un concept est un triplet de trois ensembles: C = (S, I, φ)
S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)
I: l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)
φ: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

L'identification par l'élève du champ conceptuel correspondant à la situation va lui permettre une juste représentation de la situation et son traitement avec les outils adéquats.

En pratique, et pour l'opération qui nous occupe, l'identification par l'élève de la classe de problèmes faisant appel à la division, la connaissance des outils permettant de traiter ces situations et l'utilisation des mots et des symboles utiles à la résolution de ces problèmes seront une clé pour que le sens de l'opération soit un savoir scolaire identifié par l'élève. La typologie des situations multiplicatives proposée par M. Vergnaud intervient au niveau du sens de l'opération et dans une moindre mesure pour la construction de la technique opératoire. En revanche, l'introduction des mots désignant les différents termes de l'opération fait bien partie du concept de division et nous verrons quand ils seront introduits auprès des élèves.

3.4 Différenciation

Toute situation didactique proposée ou imposée uniformément à un groupe d'élèves est inévitablement inadéquate pour une partie d'entre eux. Pour quelques uns, elle est trop facilement maîtrisable pour constituer un défi et provoquer un apprentissage. D'autres élèves, au contraire, ne parviennent pas à comprendre la tâche, donc à s'y impliquer. Même lorsque la situation est en harmonie avec le niveau de développement et les capacités cognitives des élèves, elle peut leur sembler dénuée de sens, d'enjeu, d'intérêt et n'engendrer aucune activité intellectuelle notable, donc aucune construction de connaissances nouvelles, ni même aucun renforcement des acquis. (Philippe Perrenoud, La pédagogie différenciée : des intentions à l'action, ESF, 1997)

L'objectif à atteindre est unique : apprendre une technique opératoire de la division. Cependant, les représentations des élèves ne sont pas les mêmes. Les manières d'apprendre ne sont pas les mêmes. Les types d'intelligences ne sont pas les mêmes, certains élèves à forte dominante visuelle vont avoir un schéma mental de la situation, d'autres non. Pour certains, seule la manipulation rendra compte d'un partage. Enfin les élèves ne vont pas tous au même rythme et il faut respecter ce rythme si on veut espérer que chacun construise effectivement la notion.

Philippe Meirieu rapporte, dans *L'école, mode d'emploi*, un proverbe qu'il avait formulé avec ses élèves :

Il faut beaucoup de chemins pour que tout le monde arrive en haut de la montagne.

C'est une bonne métaphore pour exprimer un des problèmes actuels de l'école. Dans le même ouvrage (p 97) :

[...] A partir du moment où l'on fait l'option de fournir à tous un tronc commun de connaissances générales, quand se côtoient à l'école des élèves élevés dans des habitudes sociales et culturelles différentes, munis d'outils intellectuels très hétérogènes, la différenciation de la pédagogie s'impose.

La différenciation serait une réponse à la volonté d'une Ecole pour tous avec un objectif d'enseignement unique mais des chemins divers.

L'objet de la différenciation est de ménager ces chemins, plus longs pour certains, moins longs pour d'autres, empruntant des revêtements de différentes natures parfois. Cette différenciation peut être simultanée (différents travaux ou différentes démarches en un même temps) ou successive (l'enseignant varie les situations pour favoriser successivement telle ou telle entrée dans la notion).

Les échanges entre les élèves sont une source intéressante pour confronter des représentations, des manières de faire. Le travail en groupes est une modalité de travail favorisant ces échanges.

3.5 Utilisation d'une démarche par étapes

Dans « didactique des mathématiques », Jean Brun rapporte le texte de G. Brousseau, dans lequel il indique que :

« le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont proposées. »

Pour la technique de la division comme pour d'autres enseignements, il n'existe pas de situation qui permette à l'élève de fabriquer directement une conception correcte de la connaissance qu'on veut lui faire acquérir. Il faudra observer plusieurs étapes. Le savoir enseigné dans les premières étapes, pour résoudre une situation de division, sera donc provisoirement inadéquat ou insuffisamment performant, mais constituera un levier pour la construction d'une technique experte par adaptations successives.

L'enseignant pourra se voir reprocher par l'élève, les parents ou les enseignants des classes supérieures de ne pas enseigner la technique experte. Pour les élèves, on comprend le poids social que peut représenter le fait de savoir faire une division, y compris sans rien comprendre à la technique opératoire. Mais il faudra user de persuasion : la technique est secondaire, la construction de cette technique est primordiale. Pour les parents, c'est l'angoisse de ne pas voir l'élève réussir qui va motiver leurs réactions. A l'enseignant de les rassurer et de montrer un cheminement dans le travail de l'élève. Pour les collègues, il faut qu'une discussion au sein de l'équipe apaise les reproches éventuels. Néanmoins, c'est la seule solution pour l'enseignant s'il veut éviter un enseignement formel qui fera l'impasse du sens.

Plusieurs étapes seront nécessaires pour arriver à la technique opératoire de référence, et ces étapes s'inscriront plus largement dans une démarche générale qui peut se décomposer en plusieurs phases (Donner du sens aux apprentissages, Fénichel, Pfaff) :

- recherche, les élèves sont confrontés à la situation-problème,
- formulation, les élèves explicitent les démarches,
- validation, les démarches sont analysées et comparées,
- institutionnalisation, l'enseignant reprend la nouvelle connaissance acquise.

3.6 Déclinaison de ces apports dans la situation d'enseignement

Le travail sur la technique opératoire de la division commencera par une situation-problème suffisamment complexe, gage de la construction du savoir visé.

Pour éviter que les élèves abordent une technique opératoire qu'ils ne comprennent pas, je vais tenter de faire que chacun construise la technique opératoire à son rythme sans que cela soit un obstacle aux travaux proposés si les techniques provisoires ne sont pas extrêmement performantes. Ce travail sur la technique opératoire se fera tout au long du travail sur la division, de manière à ce que le sens accompagne la technique, s'en nourrisse, et vice-versa. Notamment la jonction des situations de groupements et partages sera l'objet d'un travail mené à plusieurs reprises tout au long de la séquence d'apprentissage.

On laissera à chacun le temps de faire son cheminement et d'utiliser la technique provisoire qui lui semblera adéquate, et surtout qu'il comprendra. L'enseignant devra accompagner les progrès de chacun et pousser vers la technique de référence de manière à éviter l'attentisme et la cristallisation de techniques non expertes.

Les termes propres à la division (partage, groupement, diviseur…) utilisés tout au long de cet apprentissage n'interviendront que pour accompagner la construction du concept de division et au service du sens de ce qui est effectué.

4 Expérimentation

4.1 Ce que proposent des manuels.

Dans « Spirales CE2 », les auteurs proposent deux chapitres intitulés « Résoudre des situations de division ». Il s'agit de familiariser les élèves avec des situations de partages et groupements, pour arriver à l'écriture « 17 = (3 x …) + … ». Ensuite les élèves sont guidés vers une méthode soustractive simple. La technique opératoire n'est pas abordée, le manuel se contentant d'appuyer sur le fait que des multiplications successives par tâtonnement viennent à bout des problèmes proposés. La potence n'est pas montrée ni le signe « : ».

Ce manuel prend le parti de travailler avec des nombres assez petits en allant du simple vers le difficile. La première situation proposée est celle de 5 brigands se répartissant

16 louis d'or, puis 26. La démarche est dirigiste, des modèles sont proposés. Les modèles de résolution par soustraction ou addition des deux premiers chapitres font place à une démarche multiplicative dans les suivants sans lien entre les deux techniques.

La démarche reste dirigiste, ne fait pas appel aux représentations premières des élèves, et on peut rester dans la pédagogie du modèle si on se conforme aux techniques exposées en début de chapitre.

« Euromaths CE2 » prend le parti d'aborder très tôt la notion de division, deux chapitres de la période 2 s'intitulant « Multiplication et division ». Ils sont suivis par des chapitres s'intéressant à la technique de la multiplication puis de trois autres chapitres s'intéressant au sens des deux opérations.

Dans ce manuel, les situations de découverte sont de réelles situations-problèmes et la technique de la division n'est pas abordée. En revanche, de situations sur des collections ou des longueurs sont proposées, avec des situations de partition et de quotition, sans modèle prédéterminé. Il peut paraître ambitieux d'aborder le mot « division » si tôt en CE2, mais ce n'est que l'introduction d'un mot qui correspond bien à ce qu'on propose aux élèves depuis des années intuitivement et on laisse les élèves construire la multiplication comme des additions itérées et la division comme les élèves l'entendent, sans modèle préétabli.

Ni la potence ni le signe « : » ne sont introduits. Les problèmes proposés vont porter sur des nombres conséquents (436 perles à partager entre 4 enfants) et vont proposer des situations de multiplication et de division successivement dans les mêmes chapitres.

Pour le niveau CM1, les manuels s'opposent également sur la manière d'introduire la technique opératoire. Maths CM1, collection Quadrillage, Istra, propose en découverte une activité de distribution de cartes mais propose immédiatement une démarche soustractive. Le signe « divisé » et les termes de dividende, diviseur, quotient et reste sont donnés dans la foulée puis on arrive très rapidement à la potence.

Dans une autre démarche, on trouve Cap Maths CM1, qui reprend des situations tirées des travaux d'ERMEL. D'un côté le sens de l'opération est travaillé, y compris avec recours à la calculatrice et après un travail de renforcement de la numération la technique opératoire est introduite après une étape transitoire de soustraction de multiples. Pour les premiers travaux de partages menant à la technique opératoire (exercice « le partage des pirates »), il est demandé aux élèves d'effectuer le partage, sans que le maître ne propose de méthode. Elle sera introduite ensuite avec un schéma modélisant le partage qui sera ensuite relié à la division posée. ERMEL souligne que l'optimisation du calcul ne se fera que dans un deuxième temps et que la technique experte finale ne concernera que le CM2. La liaison du sens et de la technique est primordiale et donne lieu à une première technique naïve qui sera abandonnée par la suite. Dans Cap Maths, le cheminement vers la technique experte se fera notamment par un retour sur la numération.

Les situations de départ trop simples ne vont pas mener à une recherche de la part des élèves. Les démarches qui produisent des modèles identifiables par les élèves et utilisables par mimétisme ne prennent pas en compte les représentations premières des élèves. Elles ne répondent pas à la démarche que je me propose d'employer dans le sens où chaque élève ne peut pas suivre sa route.

4.2 Expérimentation avec les élèves

4.2.1 Annoncer ce qu'on attend des élèves

Pour commencer, j'ai annoncé aux élèves qu'on allait aborder la division mais que le but n'était pas de savoir effectuer l'opération mais d'en construire le sens. En les rassurant sur le fait qu'ils y arriveraient tous à terme et que mes attentes ne sont pas la virtuosité dans la technique opératoire, j'espère écarter les aides familiales potentielles qui pourraient interférer avec ce que l'élève est en train de construire. Il est utile, à ce moment-là, de redemander aux élèves d'où vient le « zéro » de la multiplication posée à deux chiffres. Tous ne s'en rappellent pas forcément. Appuyer sur le fait que savoir d'où il vient est aussi important que de savoir effectuer l'opération va être une illustration pour les élèves de ce qu'on peut attendre d'eux pour la division.

Le vécu de l'élève intervient également : comment les évaluations passées au sujet des opérations et de la technique opératoire ont-elles été notées ? Une opération peut être « fausse » pour plusieurs raisons : erreur de calcul, erreur dans la technique opératoire, erreur « d'étourderie » (oubli de marquer un chiffre…). Il m'est arrivé de voir des copies d'élèves dans lesquelles aucune opération n'est « juste », et pourtant l'élève sait assurément poser les opérations et les mener à terme. Il est inconcevable de leur asséner un « non acquis » et même douteux de noter « en voie d'acquisition » si la technique est acquise. Evaluer « utiliser la technique opératoire des quatre opérations », compétence du socle commun, ne saurait donc s'identifier à « sait effectuer des opérations justes », surtout lorsque ce sont d'autres compétences qui entrent en jeu, comme la connaissance des tables par exemple.

Le fait d'annoncer que chaque élève a le temps de construire l'opération à son rythme pourra également participer à apaiser les craintes des élèves et leur permettre d'aborder le travail avec plus de sérénité.

4.2.2 Le partage intuitif, construction du sens de la division

Le travail du sens de la division est déjà commencé lorsque les élèves arrivent à en construire la technique. Dès la maternelle, que ce soit ou non l'objectif de la séance, les élèves sont confrontés à des partages. Lorsqu'il s'agit de répartir du matériel dans des situations de travail, lorsqu'il s'agit de donner des objets à plusieurs élèves de manière à ce que chacun en ait le même nombre, lorsqu'il s'agit de distribuer des cartes pour un jeu, les élèves commencent à construire le sens d'un partage. Dans des jeux de cartes de type « bataille » qu'on peut exploiter en cycle 2 avec du matériel adapté, la répartition initiale des cartes va donner lieu à un partage. Ce partage s'il est répété un certain nombre de fois, verra l'émergence de méthodes plus efficaces que la simple distribution carte par carte. Là encore, l'objectif de la séance est peut-être autre, cependant la situation de partage est présente de manière consciente.

Les situations de découverte de la multiplication abordées dès le CE1 continuent à installer le sens du partage. Sur des exemples simples de plans de classe, on peut demander aux enfants de calculer le nombre de chaises dans une classe après avoir dénombré les tables doubles. Ensuite on peut mener une réflexion sur le nombre de colonnes ou de rangées. La situation est simpliste et les nombres restent mesurés. Le but ici n'est vraisemblablement pas de confronter l'élève à une situation problème mais on fait jouer le partage comme une situation inverse de celles relevant de la multiplication.

Rémi Brissiaud parle d' « addition naturelle » pour désigner la technique utilisée pour additionner mentalement deux nombres entiers par des adultes n'ayant pas appris cette technique à l'école. On peut extrapoler en se demandant si une « division naturelle » existerait. En parlant de Q-problèmes et de E-problèmes, dont il emprunte la dénomination à Vygotski (problèmes du quotidien dont la résolution est demandée par la vie quotidienne et problème de l'école, dont la résolution n'est issue que d'un savoir scolaire), il rapporte que des problèmes simples de multiplications, de type Q-problèmes, sont résolus assez facilement par des gens n'ayant pas fréquenté l'institution scolaire. Il est à parier que des problèmes de partage équivalents seraient également résolus avec facilité. La vie de tous les jours propose des situations de partition auxquelles les élèves sont confrontés bien avant qu'on aborde véritablement et ouvertement cette notion. Proposer des Q-problèmes n'est pas forcément porteur d'apprentissage dans la mesure où la démarche de l'élève existe déjà en dehors de l'institution scolaire.

En revanche, la quotition est le plus souvent résolue par essai erreur sans faire appel à une représentation de la situation ramenant à la multiplication.

4.2.3 La situation de départ

La première situation problème que j'ai retenue pour aborder la division est une situation de quotition comme celle des rubans proposée par Cap Maths. On peut légitimement se poser la question : quotition ou partition pour une première approche ? Les situations de partages sont plus familières aux élèves, car plus facilement transposables dans la vie courante. Je préfère donc aborder la difficulté directement en me situant sur un terrain scolaire. Il sera intéressant par la suite d'inverser ces deux systèmes avec les boîtes à œufs (collection dénombrable) pour la quotition et « un ruban à partager en » (longueur) pour la partition. Il faut que les nombres soient suffisamment grands pour que l'activité ne soit pas triviale et qu'une réelle réflexion soit engagée. Les élèves comprennent ainsi la situation, mais ne peuvent y répondre immédiatement faute d'outil expert.

La première situation, individuelle, à laquelle sont confrontés les élèves, est une situation de groupement où il s'agit de découper un ruban en rubans plus petits d'une taille donnée. Les premières productions des élèves vont donner lieu à des échanges collectifs. Le but de ce premier travail va être de casser les représentations fausses et de s'assurer que la situation est comprise. Une première comparaison des techniques employées va simplement, sans jugement sur leur efficacité, montrer qu'il existe plusieurs procédures possibles. Des élèves qui n'auraient pas trouvé de procédure efficace auront un petit panel de procédures dont ils peuvent s'emparer.

On va entrer par la suite dans le travail de la technique opératoire. J'introduis une situation de groupement de ce type :

Un fermier a 207 oeufs qu'il veut ranger dans des boîtes de 6 œufs. Combien de boîtes va-t-il remplir ?

Je prends volontairement des exemples récurrents en termes de bonbons et de boîtes à œufs car ce sont des références simples pour les élèves. La différence entre partition et quotition sera, pour les élèves, le fait de savoir si une situation est une situation de type « bonbons » ou de type « boîte à œufs ». Les termes « groupement » et « partage » seront introduits dans un deuxième temps, lorsqu'il s'agira d'ériger ces termes en savoirs scolaires et pas en simple connaissances intuitives ou explicites.

L'élève va aborder la technique opératoire avec ses propres représentations des partages et des groupements. Si l'on veut construire pour chacun une technique opératoire qui fasse sens, il faut laisser l'élève partir de celles-ci si elle sont justes et le faire progresser vers la technique experte de manière à ce qu'il puisse faire du lien entre sa représentation personnelle des partages et groupements et son expression au sein du calcul posé.

Les productions des élèves sont de plusieurs types (voir Annexe IV) :

Dessin
Justine va dessiner 207 ronds représentant les 207 œufs et tenter ensuite de les grouper par 6. Le temps du dessin, extrêmement coûteux, ne la découragera pas, certaine qu'elle est d'arriver à un résultat. Cette méthode a le mérite de montrer une représentation claire de la situation, mais elle sera jugée très peu efficace.

Additions itérées
Jessica tente d'additionner 6 le nombre de fois qu'il faudra pour arriver au résultat. Cette démarche, coûteuse en temps, ne sera en général essayée qu'une fois et disparaît après confrontation avec d'autres.

Additions itérées de multiples
Dylan tente d'abord d'additionner 6 le nombre de fois requis, puis additionne 12, puis 60, le nombre de fois nécessaire. La difficulté de cette technique est de retenir, d'écrire en parallèle le nombre de groupements afin de les comptabiliser.

Soustractions itérées
Nathan, de la même manière que Jessica, va soustraire 6 le nombre de fois nécessaire. Démarche aussi coûteuse que la première, cependant elle a le mérite de ne s'intéresser qu'au reste. Elle est dans une démarche du point de vue de celui qui donne et pas du point de vue de celui qui reçoit.

Soustractions itérées de multiples
Antoine utilise naturellement cette méthode. C'est la méthode qui se rapproche le plus de la méthode « classique » de la division enseignée. Bien entendu, même inconsciemment, l'enseignant aura tendance à valoriser cette méthode.

Tâtonnement par Multiplication
Chloé, et certains autres élèves, souvent performants en calcul mental, vont procéder par essai erreur afin d'approcher le dividende par un multiple de 6. Cette méthode est parfois très rapide. Elle risque de perdurer longtemps et de ne pas être prise en défaut. Parfois seule l'habitude sociale de la division poussera ces élèves à quitter cette technique pour la technique de référence.

Après un premier travail individuel, on identifie collectivement les procédures employées, qu'on nommera « méthode par addition », « méthode par soustraction », « méthode par multiplication ». L'enseignant se gardera d'émettre un quelconque avis sur les techniques employées. On demandera alors aux élèves de se définir parmi les procédures exposées pour un travail en groupe. Un élève a le droit de changer de groupe dès qu'il l'estime nécessaire. On donnera quelques situations, toujours appelées « bonbons » (situation de partage) ou « boîtes à œufs » dans un premier temps.

On proposera par la suite le même genre de situations pour un travail par groupes en demandant aux élèves de résoudre en choisissant deux des techniques exposées, les groupes étant constitués d'élèves utilisant de stratégies différentes. Le fait de devoir utiliser sa technique propre mais d'être obligé d'utiliser également une autre technique d'un élève du groupe participera au fait de faire cheminer les élèves, comparer les diverses techniques et éventuellement en changer pour une plus efficace (voir Annexe V).

Un souci peut intervenir à cette étape, c'est le fait que certains élèves ne connaissent pas bien les tables de multiplications. Pour contourner l'obstacle, on peut leur proposer de se servir de leur calculatrice, mais avec interdiction absolue de se servir de la touche « : ». L'utilisation de la calculatrice pose problème. Autant son utilisation peut pallier un manque (résoudre des situations dont l'outil est absent dès le cycle 2), autant son utilisation trop systématique induit des travers. Les professeurs de collège déplorent souvent le faible niveau des élèves en calcul mental (en fait, en calcul automatisé). Il ne faut donc pas abandonner tout calcul réfléchi en se remettant à la calculatrice mais l'utiliser de manière raisonnée et limitée pour ce qu'elle est : un outil expert de remplacement ou une béquille occasionnelle, mais pas un outil permanent ni un pansement miracle. Un rapport de l'Inspection Générale de 2006 préconise dans ses conclusions qu'il faut, d'une part, *s'assurer de la connaissance des tables par cœur*, et d'autre part, *faire une plus large part au calcul instrumenté*.

L'utilisation de techniques connues, déjà présentes, pour résoudre la situation, va être institutionnalisée comme une première étape dans la construction d'une technique de résolution des situations de partages, de manière à être identifiée par l'élève en tant que telle.

L'entraînement dans ces activités va permettre des discussions au sein du groupe classe sur l'efficience de telle ou telle technique et on distinguera 3 techniques principales : addition de multiples, soustraction de multiples et multiplication.

Assez étonnamment, dès la deuxième séance de travail, la solution par additions itérées n'est plus employés du tout. Il y a fort à parier que le parallèle entre la méthode par soustractions et la méthode classique de la division a été suffisamment séduisant pour que les élèves « additifs » voient l'intérêt de changer de méthode afin de se rapprocher doucement de la méthode de référence.

Par la suite, l'identification des techniques additives et soustractives comme une seule et même méthode en comparant les résultats intermédiaires verra, par l'intervention de l'enseignant, naître la technique soustractive comme étant la technique de référence à côté de la technique par tâtonnement multiplicatif.

On pourra après quelques temps établir un document qui institutionnalise le sens du signe « : » et fait le point sur les techniques employées. Cela permettra aux élèves de fixer une étape dans leur apprentissage et de se situer par rapport aux modèles utilisés (Annexe II).

4.2.4 Retour sur le sens

Les élèves ont commencé à se forger une représentation de la division, à cette étape de la séquence, et à explorer une technique opératoire, première étape d'un cheminement vers la technique de référence.

Il va leur être proposé un travail sur des schémas correspondant à des égalités. Outre le fait de retrouver une entrée autre que purement intellectuelle dans la notion, un objectif de ce travail va être de mieux cerner les situations de groupements ou de partages et leurs expressions sous forme numérique (Annexe III).

Au niveau du sens des égalités : on peut remarquer qu'on aurait pu varier le sens des égalités. 9 = 3 x 3 ou 3 x 3 = 9. Le fait de présenter toujours aux élèves le « calcul » à gauche et le « résultat » à droite peut avoir pour effet néfaste de ne pas contribuer à installer la notion d'égalité.

A la suite de ces exercices, globalement bien réussis, on a pu s'intéresser au fait que, pour certaines écritures, plusieurs schémas pouvaient rendre compte de la situation.

Par exemple, 17 = (3x5) + 2 peut rendre compte du partage en 3, d'un groupement par 3, d'un partage en 5 ou d'un groupement par 5.

En revanche, 13 = (2x5) + 3 ne peut rendre compte que d'un groupement par 5 ou d'un partage en 5, le partage en 2 ou le groupement par 2 sont exclus car ils se traduiraient par l'égalité 13 = (2x6) + 1.

Ce travail sur le sens pur, une fois le travail sur la technique opératoire engagé, peut sembler un retour en arrière, mais il a permis de « raccrocher » quelques élèves qui avaient pu rester déstabilisés par un changement de technique opératoire dans la voie du sens de l'opération. D'autre part, du point de vue de la technique opératoire, c'est un travail sur la notion de reste qui rend plus palpable le moment où on « arrête la division » : quand le reste est inférieur au diviseur.

4.2.5 Poursuite du travail, évaluation

A la suite de ce passage progressif de la plupart des élèves à la technique opératoire de référence provisoire, il sera demandé aux élèves de rejoindre la technique de référence en utilisant les étapes au quotient centaines, dizaines, unités. Mais nous arrivons aux limites du travail qui nous importe ici. Une fois que les élèves ont commencé à poser des divisions, par eux-mêmes et en mettant du sens à leurs pratiques, le travail portera essentiellement sur la rapidité et la systématisation dans un travail d'entraînement.

A des élèves en général forts en calcul mental, qui utilisent une démarche très intuitive (Fig. a), il sera demandé de respecter un travail plus systématique (référence Fig. c). Pour des élèves victimes de leurs difficultés en calcul mental et en numération (Fig. b), le travail de ces points spécifiques rejaillira sur leur efficacité dans la technique opératoire de la division. Les deux exemples montrent des élèves qui, du pur point de vue de la liaison sens / technique opératoire, ont construit une technique qui va dans le sens de la technique de référence.

7 8 6 5	6
- 7 8 0 0	1 3 0 0
6 5	
	1 0
- 6 0	
5	

Fig. a

7 8 6 5	6
- 1 0 0 0	1 0 0 0
1 8 6 5	
- 6 0 0	1 0 0
1 2 6 5	
- 6 0 0	1 0 0
6 6 5	
- 6 0 0	1 0 0
6 5	
- 6 0	1 0
5	

7865 = (1310 x 6) + 5

Fig. b

7 8 6 5	6
- 6 0 0 0	1 0 0 0
1 8 6 5	
- 1 8 0 0	3 0 0
6 5	
- 6 0	1 0
5	

Fig. c

A la toute fin de la construction de la technique opératoire, un écrit final reprendra dans une leçon la technique experte présentée comme la figure c. Elle diffère de la technique présentée au chapitre 2.1. Ici les zéros sont présents et le quotient est décomposé en plusieurs nombres. C'est une présentation qui représente fidèlement les calculs effectués. Plus tard, une fois la technique bien acquise, on pourra améliorer cette technique pour aller vers la technique de référence, mais pour l'instant elle garde le mérite de rappeler aux élèves la construction de l'opération.

Dans l'écrit de référence final seront introduits les termes de diviseur et dividende, qui n'ont pas encore été employés. Ces termes sont utiles à la construction du concept mais j'ai préféré en retarder l'utilisation afin que la compréhension de ce que sont ces termes dans l'opération (ce qu'on divise, par quoi on le divise) précède l'utilisation des mots les désignant. Dans le cas contraire, pour les élèves, nommer arbitrairement des nombres dont ils ne maîtrisent pas bien le fonctionnement dans la technique employée n'est pas une aide.

4.2.6 Difficultés rencontrées

L'évolution des élèves est résumée dans le tableau suivant :

	Par dessin	Par additions	Par soustractions	Par addition de multiples	Par soustraction de multiples	Par multiplication	Par division	Pas de démarche mise en œuvre ou démarche erronée
Première situation	2	3	4	6	6	6		2
Travail par groupes		1	1	8	9	10		
Entraînement					13	6	8	2
Evaluation finale					3	4	20	2

Quelques points de cette évolution sont intéressants à analyser : abandon des méthodes trop naïves, abandon des méthodes additives, et enfin échec de certains élèves.

Les élèves utilisant initialement les démarches décrites dans les trois premières colonnes ont vite abandonné les techniques « naïves ». Le fait que les nombres utilisés dès les premiers travaux soient conséquents leur a montré par l'expérience que leur démarche, même si elle pouvait arriver à un résultat juste, était trop longue à mettre en œuvre et beaucoup moins performantes que celles de certains de leurs camarades.

On peut s'intéresser à la rapidité de l'abandon des techniques additives. Je pense que, dès que la technique opératoire de la division a été montrée par l'enseignant, en parallèle à toutes les techniques existantes, les élèves ont bien compris que, malgré l'annonce faite que chaque élève avait la possibilité d'utiliser la technique qui était la sienne ou celle qui lui semblait la plus aisée et efficace, la démarche par soustractions était celle qui se rapprochait le plus de la technique de référence. Ils ont cheminé vers celle-ci. Le fait que le passage des « additifs » à la démarche par soustraction se soit fait si rapidement tient potentiellement au fait qu'en CM1, pour la plupart des élèves, il est bien compris que la soustraction est l'opposé de l'addition. D'autre part, le passage du raisonnement en terme de « nombre à atteindre » de la démarche additive à celui en terme de « reste » de la démarche soustractive n'est pas si évident de cela car il demande un changement de représentation. Il est donc nécessaire pour ce passage que les concepts d'addition et de soustraction soient bien compris afin que cette transition se fasse sans que cela déroute les élèves.

Lors de l'évaluation finale (Annexe VI), deux élèves sont restés sur des démarches erronées. L'un d'entre eux a dessiné une potence mais sans mettre de lien entre les nombres écrits au quotient et ceux soustraits du dividende. Cet élève semble avoir cédé au poids social et n'a pas voulu rester sur une technique moins efficace qui était cependant la sienne et a voulu « faire semblant » en singeant la division sans en comprendre le sens.

Un autre est resté sur une démarche mêlant multiplications et additions, du point de vue du dividende, mais sans relation avec ce que constitue le quotient. Là aussi le sens de l'opération est perdu.

Pour les élèves restant sur des démarches multiplicatives, c'est le sens de la soustraction qui fait souvent défaut. En discutant avec eux, ce qui correspond aux dividende et quotient, diviseur sont identifiés. Mais il y a surcharge cognitive lorsqu'ils doivent d'un côté se représenter la part de chacun ou le nombre de groupes et d'un autre côté ce que cela représente à enlever du dividende. Il vaut peut-être mieux acter de leur positionnement, ne pas les forcer à utiliser une technique de manière mécaniste et reporter leur passage à la division à plus tard, lors d'ateliers de remédiation.

Quelques élèves, utilisant la division, ne trouvent pas le (*les* : quotient *et* reste) bon résultat. Bien souvent ce sont des problèmes de calcul posé qui sont à l'origine de leurs erreurs, ou des faiblesses en numération ou en calcul mental, comme l'élève de la figure b du chapitre 4.2.5. Pour deux d'entre eux, cependant, il y a un problème plus profond. En « faisant des divisions », ils s'éloignent du sens et marquent la même chose dans la colonne de droite (du quotient) et celle de gauche (du « reste »). On peut penser de prime abord à l'étourderie, mais il est bien possible que cela soit moins idyllique et que ces élèves soient en train de perdre le sens en plaquant une technique de manière mécanique. Pour ceux-ci, la remédiation proposée a été de revenir à leur technique naïve antérieure et de refaire le cheminement qui leur a été propre vers la technique de référence. Pour ces deux élèves, un écueil ponctuel posant problème a été contourné sans le voir plutôt que d'être identifié et de demander résolution. Ce sont des capacités d'autorégulation qui manquent dans ces situations.

Le rôle de l'enseignant est donc pluriel :

- ne pas être attentiste. Il faut pousser les élèves vers la technique opératoire de référence en laissant de côté les étapes intermédiaires. Il faut cependant respecter le rythme de chacun sous peine de perdre certains en route. L'enseignant doit donc appliquer un savant mélange d'exigence et de respect.
- casser les représentations fausses et fournir les situations capables de donner du sens aux apprentissages. Le concept de division est l'un des plus difficiles à acquérir en terme d'opération. Le langage est un outil privilégié pour que les élèves se saisissent

du concept et l'enseignant aura à cœur de faire parler les élèves et de faire émerger des références communes afin que tous puissent construire le sens de l'opération.

- aider à la formulation. Le langage, porteur du sens, peut parfois manquer pour que les élèves expriment clairement leur pensée. L'enseignant, en apportant de références communes claires et en aidant les élèves à formuler leur pensée, peut espérer qu'ils produisent du sens et des représentations claires.
- évaluer et réguler. Il faut évaluer en cours d'apprentissage leurs compétences de manière à rendre intelligibles les difficultés éventuelles afin d'amener les élèves à les surmonter.

4.2.7 Remédiation

Pour les élèves qui seraient en échec vis-à-vis de l'apprentissage visé, deux stratégies ont été appliquées.

Tout d'abord, un retour en arrière a été effectué vers leurs représentations initiales. Si celles-ci étaient erronées, les représentations suivantes, empruntées aux travaux de groupes, ont servi de base de départ. Un cheminement pas à pas a eu lieu ensuite, laissant aux élèves une deuxième chance de parcourir le chemin. Cela a pu fonctionner lorsque ces élèves ont subi un échec en cours de démarche sans bien l'identifier.

Si cette démarche n'a pas su répondre à leurs difficultés, il peut être envisagé de changer d'entrée dans l'activité. Peut-être la situation initiale n'a pas été suffisamment porteuse de sens pour servir de référence. Pour les deux élèves concernés, c'est une réflexion sur la régularité des multiples sur une situation de marelle (Enseigner les mathématiques à l'école, Cerquety Arberkane) qui les a entraîné vers une démarche multiplicative. On différera l'entrée dans la technique de la division, comme expliqué plus haut.

Le fait de gérer des multiplications et des soustractions conjointement entraîne parfois les élèves dans des situations de surcharge cognitive. Plutôt que d'entraîner des élèves dans ce cas à faire semblant de savoir en singeant la technique sans la comprendre, autant attendre que les concepts multiplicatifs et soustractifs soient mieux affermis afin de reprendre plus sereinement le travail sur la technique de la division.

4.3 Evaluation de la démarche

Une fois l'expérimentation réalisée, un retour sur nos propositions de départ va nous permettre d'évaluer la démarche proposée.

Le fait d'avoir respecté les techniques premières des élèves et de partir de leurs représentations semble avoir permis à la plupart de construire une technique opératoire allant vers la technique de référence mais surtout d'y mettre du sens. La situation-problème de départ et les travaux de groupe ont réussi à faire que chacun s'engage dans une construction de la notion.

La gestion par l'enseignant des différents cheminements des uns et des autres n'a pas particulièrement posé problème. Même des élèves dont les faibles compétences en calcul mental auraient pu être un obstacle à l'acquisition d'une technique ont réussi à investir celle-ci.

Les phases collectives, notamment celles où les élèves ont expliqué leurs techniques et ont comparé celles-ci, ont conduit à une objectivation des connaissances. Chacun pouvait alors se situer, comparer les techniques et choisir sa voie vers la technique de référence. Des validations successives des techniques employées, à différents moments de l'apprentissage, ont rassuré les élèves : ils avançaient, chacun à leur rythme, et leur pratique était jugée correcte d'une part par leurs camarades, d'autre part par l'enseignant.

Le pourquoi du passage massif et unilatéral des élèves « additifs » aux soustractions itérées reste en suspens. Ces élèves, interpellés sur ce sujet, ont en général répondu que « c'était un peu la même chose ». Soit le concept d'addition-soustraction est effectivement maîtrisé et cela n'a réellement pas posé problème, soit le fait que la division vienne de la démarche soustractive a été suffisamment inducteur pour les convaincre de changer, quitte à perdre un peu du sens qu'ils mettaient dans leur démarche.

Du point de vue de l'enseignant, le fait d'avoir pris les temps de mettre à plat les situations d'enseignement des années antérieures et de chercher les fondements de ce que mon expérience me poussait à mettre en œuvre a été très enrichissant. Pour la suite du travail sur la division, le travail sur le concept de division et la classification des situations au sens de Vergnaud m'a permis de mieux comprendre une autre source de difficultés chez les élèves.

5 Conclusion

La division à l'école élémentaire a alimenté nombre de débats à la suite de la parution des nouveaux programmes de 2008. L'enseignement de celle-ci a beaucoup évolué durant la seconde moitié du siècle passé.

L'importance symbolique de cette opération dans le cursus scolaire de l'élève tend à en faire une opération redoutée. Les difficultés qui peuvent surgir lors de son apprentissage peuvent venir en partie de la perte du sens de l'opération lorsque les élèves abordent la technique opératoire.

La démarche proposée ici consistant à faire cheminer les élèves de manière différenciée en respectant leurs représentations et en explorant le concept de division tout en construisant la technique opératoire semble avoir répondu aux difficultés des élèves sur ce point précis. L'objectif principal n'était pas tant qu'ils fassent un lien entre la technique opératoire et le sens de l'opération, mais bien qu'ils mettent du sens dans la technique opératoire. Le gage d'une bonne compréhension de cette technique est qu'ils puissent la retrouver ultérieurement, en partant du sens de l'opération.

Plus généralement, ce travail rend compte d'un apprentissage mathématique dans une démarche constructiviste avec, d'un point de vue pédagogique, l'utilisation de la différenciation, et d'un point de vue didactique l'utilisation d'une démarche par étapes se basant sur une situation-problème avec une exploitation longue des représentations initiales des élèves. L'utilisation de différents aspects de cette démarche générale peut être transférable à d'autres apprentissages en mathématiques à l'école élémentaire.

6 Bibliographie

Programmes de l'école primaire 2008

Programmes de l'école primaire 2002

Programmes de l'école primaire 1995

Ermel CM1, Apprentissages numériques et résolution de problèmes

Après la lecture, le calcul. L'enseignement de la division en question, par Gérard Morin, 13 décembre 2006, Cahiers Pédagogiques

Dictionnaire de Mathématiques Elémentaires – Stella Baruk

Enseigner les mathématiques à l'école – F. Cerquetti-Aberkane

Comment les enfants apprennent à calculer ? – Rémi Brissiaud

Pourquoi des mathématiques à l'école ? – Roland Charnay

L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième République aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse » - Renaud d'Enfert

Didactique des mathématiques – J. Brun

Enseignement et apprentissage des mathématiques – Que disent les recherches pédagogiques ? Marcel Crahay, Lieven Verschaeffel, Eric de Corte, Jacques Grégoire

Donner du sens aux mathématiques, tome 2 – Fénichel, Pfaff

L'école, mode d'emploi – Philippe Meirieu

Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques – Joël Briand, Marie-Claude Chevalier – Hatier

Rapport de l'Inspection Générale - n° 2006-034, juin 2006

ANNEXES

ANNEXE I

42me Leçon — 120 — Arithmétique

LA DIVISION : SENS DE L'OPÉRATION

Photo Armand Colin.

La distribution des cahiers.

Exercices de réflexion : *Division sans reste.* — 1° Une maîtresse donne 8 cahiers à chacune des 6 élèves du cours supérieur. Combien a-t-elle distribué de cahiers ?

2° En partant du résultat précédent, répondez aux questions suivantes :

a) Une maîtresse distribue 48 cahiers à 6 élèves. Quelle est la part de chacune ?

b) Une maîtresse qui a 48 cahiers à distribuer doit en donner 8 à chacune de ses élèves. Combien y aura-t-il d'élèves à en recevoir ?

Cours d'Arithmétique
Ch. Pugibet

ANNEXE II

MATHÉMATIQUES

J'ai 138 billes et je veux les partager entre 4 enfants. Combien de billes aura chaque enfant, combien en restera-t-il ?

Plusieurs méthodes :

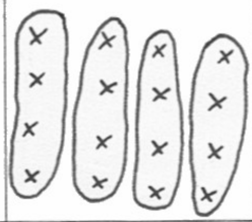
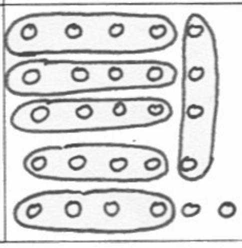
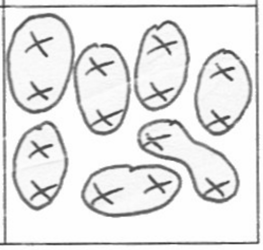
Par tâtonnement	En faisant plusieurs distributions	Par division
$30 \times 4 = 120$ $40 \times 4 = 160$ $35 \times 4 = 140$ $34 \times 4 = 136$ $136 + 2 = 138$ $138 = (4 \times 34) + 2$	Reste / Ce qu'on donne à chacun 138 $30 \times 4 = 120$: -120 → 18 ; 30 $4 \times 4 = 16$: -16 → 2 ; 4 $30 + 4 = 34$ $138 = (4 \times 34) + 2$	$138 \div 4$: $138 - 120 = 18$; 30 $18 - 16 = 2$; 4 $30 + 4 = 34$ $138 = (4 \times 34) + 2$

Solution : $138 = (4 \times 34) + 2$ Chaque enfant aura 34 billes et il en restera 2.

ANNEXE III

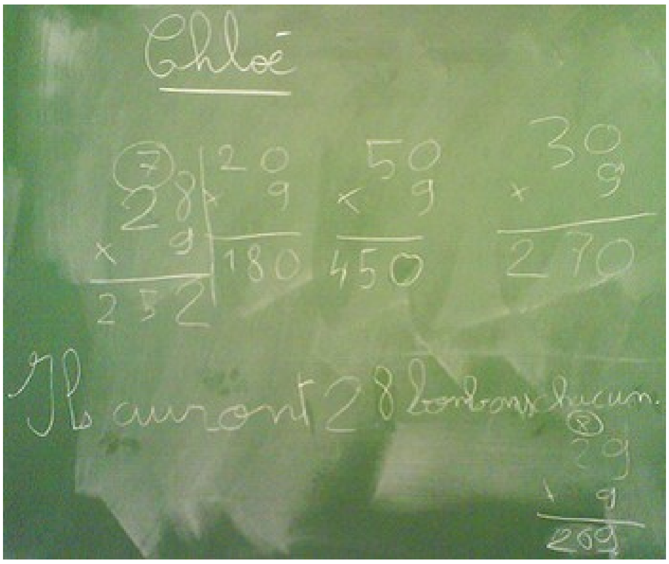
DIVISION – EXERCICE

Fais les schémas correspondants ou écris l'égalité.

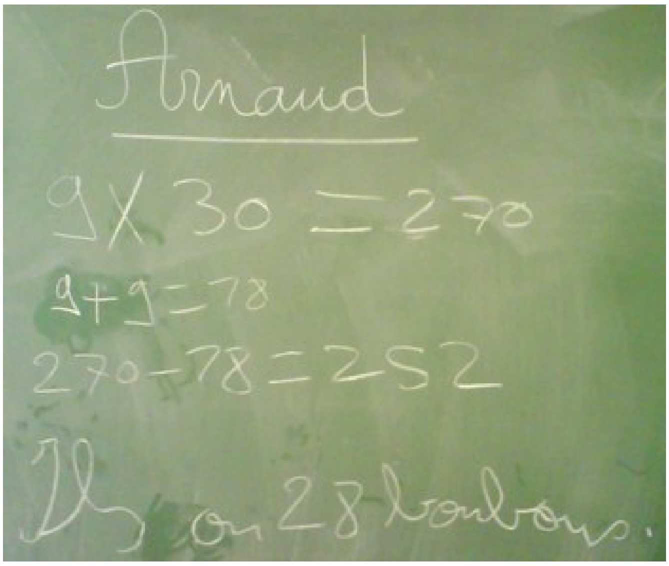
$15 : 3 = 5$		$18 : 6 = 3$	
			
$17 = (3 \times 5) + 2$		$21 : 3 = 7$	
			
$9 = (2 \times 4) + 1$		$18 = (4 \times 4) + 2$	
			

ANNEXE IV

Par soustractions.

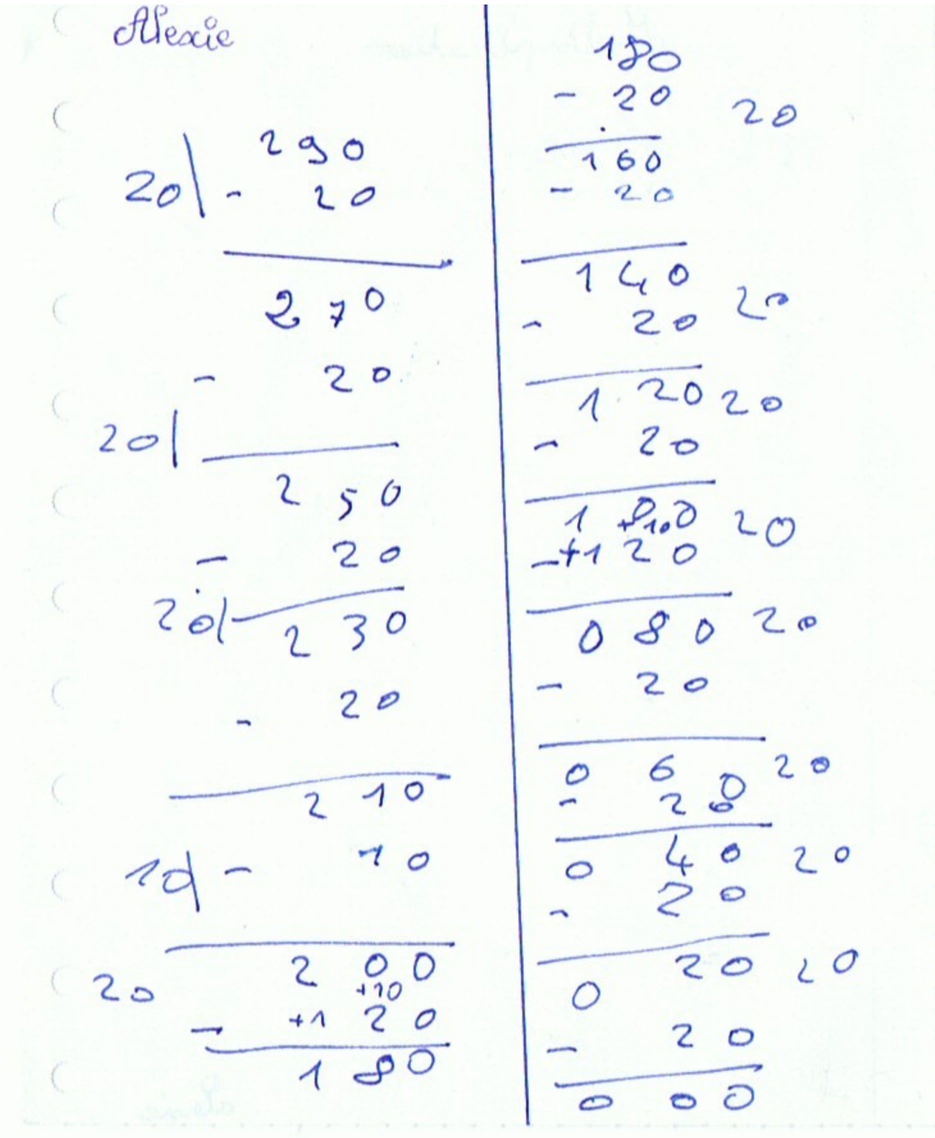


Par tâtonnement multiplicatif.

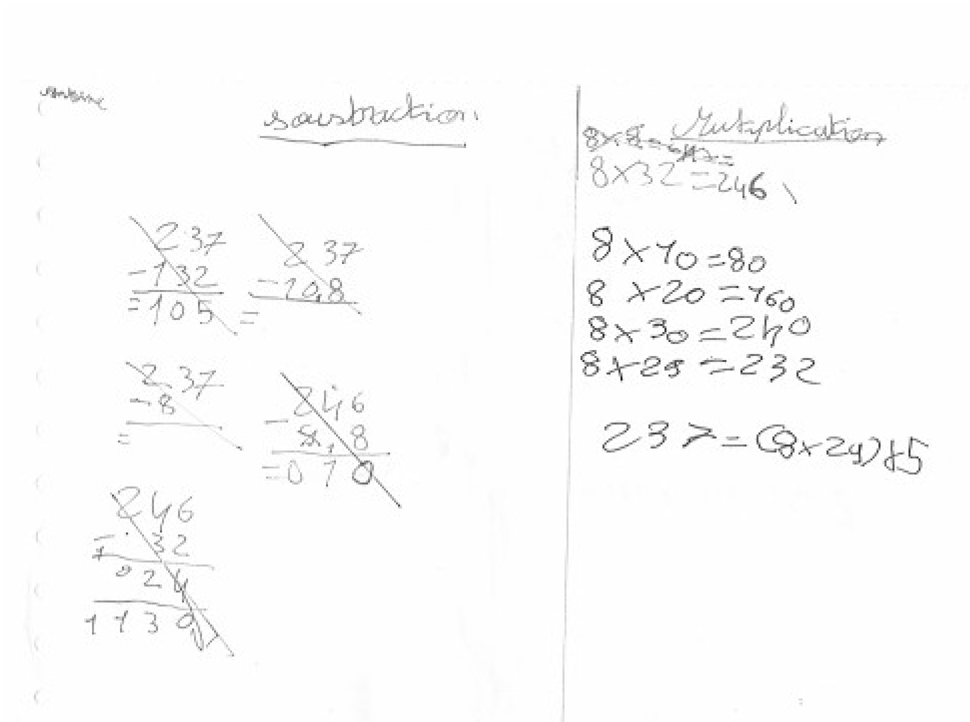


Une méthode mixte.

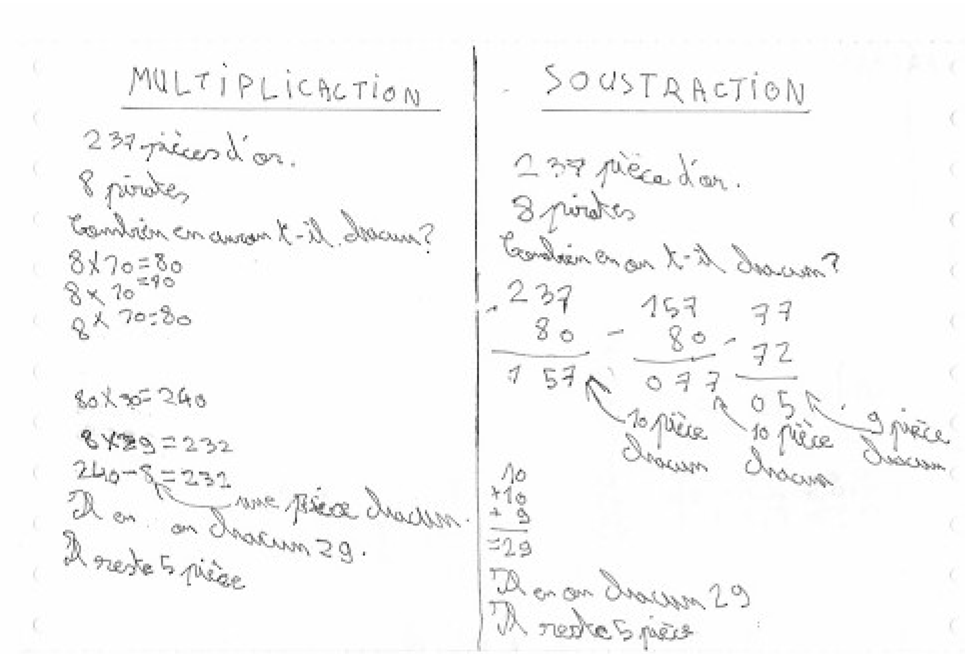
ANNEXE V



Une élève qui ne « multiplie pas » entre le quotient et ce qu'elle retire au reste.



Deux techniques utilisées en parallèle : soustractions itérées de multiples et multiplication.



Océane le gall

Multiplication ×

Problème

237 pièces d'or. Il faut les répartir en 8 pirate. Combien aurons t-il de pièces d'or chaqun?

8 × 10 = 80

8 × 20 = 160

8 × 30 = 240

8 × ~~30~~ 29 = 232

Ils auront 29 pièces d'or chacun mais il en manque 5.

Soustraction −

Problème

237 − 16 = 221 (2)

221 − 16 = 205 (2)

205 − 176 = 189 (2)

189 − 16 = 173 (2)

173 − 16 = 157 (2)

157 − 180 = 77 (10)

77 − 72 = 05 (9)

Ils auront 29 pièces et il en reste 5.

---

soustraction

237 − 48 = 189

189 − 48 = 141

141 − 48 = 093

93 − 48 = 45

45 − 32 = 13

13 − 8 = 5

29 pièces, reste 5

multiplication

8 × 10 = 80

8 × 20 = 160

8 × 30 = 240

8 × 29 = 232

ANNEXE VI

benjamin

Le restaurant "MIAM-MIAM" peut accueillir 246 personnes. Dans la salle, il n'y a que des tables de 6 places. Le menu coûte 8 euros.

Combien de tables y a-t-il dans ce restaurant ?

246 | 6
-120 | 20
126
-120 | 20
6 | 1

Il faut 41 tables. ✓

Nathan

Le restaurant "MIAM-MIAM" peut accueillir 246 personnes. Dans la salle, il n'y a que des tables de 6 places. Le menu coûte 8 euros.

Combien de tables y a-t-il dans ce restaurant ?

~~246 : 41 = 6~~

6x10=60
6x20=120
6x30=180
6x40=240
6x41=246

Il y a 41 chaises dans le restau

Thibaut - k

Le restaurant "MIAM-MIAM" peut accueillir 246 personnes. Dans la salle, il n'y a que des tables de 6 places. Le menu coûte 8 euros.

Combien de tables y a-t-il dans ce restaurant ?

246 10
- 60
186 10
- 60
126

126 10
- 60
066

66 10
- 60
06
- 6
00 +1

} 41

Oui !